



**HAL**  
open science

# GÉOMÉTRIE SOUS-RIEMANNIENNE SUR LE GROUPE D'HEISENBERG

Naceurdine Bensalem

► **To cite this version:**

Naceurdine Bensalem. GÉOMÉTRIE SOUS-RIEMANNIENNE SUR LE GROUPE D'HEISENBERG. École de recherche CIMPA : Géométrie sous-riemannienne, Jan 2012, BEYROUTH, Liban. hal-00700908

**HAL Id: hal-00700908**

**<https://confremo.hal.science/hal-00700908>**

Submitted on 24 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# GÉOMÉTRIE SOUS-RIEMANNIENNE SUR LE GROUPE D'HEISENBERG

NACEURDINE BENSALÉM

ABSTRACT. L'objectif de ces notes est de décrire la géométrie de la distribution du groupe d'Heisenberg. A travers ce modèle, on expose aussi bien les propriétés de base de la structure sous-riemannienne associée, ainsi que des résultats de recherche récents.

**Mathematics Subject Classification :** 53C17, 53C22, 35H20.

**Mots-clés :** Distribution d'Heisenberg, accessibilité, géodésique sous-riemannienne, minimiseur singulier

**Key-words :** Heisenberg distribution, accessibility, sub-Riemannian geodesics, singular minimizers

## 1. SUMMARY

These notes entitled "*Sub-Riemannian geometry on the Heisenberg group*" are mostly based on the work of authors cited in the monographs [1], [3], [4] and [9]. The Heisenberg group appears in various areas of mathematics. This is indeed a reference space in control theory [10], [13], in Riemannian geometry [6], [14] and [7] and in sub-Riemannian geometry, where this noncommutative Lie group is considered as the prototype model. Through this object we present the concepts and basic properties of this geometry (also known as Carnot geometry or nonholonomic Riemannian geometry) as well as some results published recently. In the first part we recall some basic geometric properties of the Heisenberg group of dimension three "this geometry is sufficiently simple to be explicitly described and sufficiently complicated to be interesting [6]". The second part is devoted to the application of different objects of sub-Riemannian model. On the Heisenberg group, an important role is played by the nonintegrable distribution generated by the vector fields,  $X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2\partial_t$  and  $X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1\partial_t$  :

$$\mathcal{D} : x \rightarrow \mathcal{D}_x = \text{span}_x \{X_1, X_2\}.$$

For this distribution, we give a characterization of horizontal curves as well as algebraic and geometric properties. We also deal with the issue of accessibility (or connectivity) of the distribution  $\mathcal{D}$ , where we give a simple proof of the famous Chow's theorem. The third part is devoted to the problem of geodesics. We consider first the Hamiltonian framework where the Heisenberg group is a good environment to apply this formalism. In this context, a geodesic is a projection on the state space of an extremal, i.e., a solution of the Hamiltonian system and every geodesic is a horizontal curve. Then, we introduce a new structure defined by the connection 1-form  $\omega = dt - 2x_2dx_1 + 2x_1dx_2$ , where  $\mathcal{D}_x = \ker_x \omega$ . The curvature 2-form of

distribution  $\mathcal{D}$  is defined as  $\Omega(U, V) = d\omega(U, V)$ ,  $U, V \in \mathcal{D}$ . The form  $\Omega$  describes the extrinsic geometry of the Heisenberg distribution. If the sub-Riemannian metric is defined by the vector fields  $X_1, X_2$ , which are orthonormal in this way, then the intrinsic geometry of  $X_i$  coincides with the extrinsic geometry of  $\Omega$ . From this algebraic tool, we give explicit expressions of geodesics and their metric properties. Using the Lagrangian point of view, in the case of the vector fields  $X_1$  and  $X_2$ , it follows that the geodesics are horizontal curves that satisfy the Euler-Lagrange equations. On the Heisenberg group the Lagrangian has good properties by left translations allowing, in particular, to study the metric properties of geodesics. The final section highlights the existence of certain "exceptional" geodesics. In general, there are two classes of geodesics in sub-Riemannian geometry. The first generalizes the Riemannian case, these are curves that are projections of the trajectories of the Hamiltonian field. These geodesics are called normal (or regular). The second ones are the minimizers curves which are not projections of the trajectories of the Hamiltonian field, called abnormal (or singular), discovered by Montgomery [11]. Notice that, the intersection of two classes is not empty. For this purpose, let us briefly present and discuss the singular minimizers in the case of the vector fields

$$X_1 = \partial_{x_1} + A_1(x)\partial_t, \quad X_2 = \partial_{x_2} - A_2(x)\partial_t,$$

with  $A_1, A_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ . The distribution  $\mathcal{D} = \text{span}\{X_1, X_2\}$  is not integrable if and only if

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \neq 0.$$

If  $g$  is a sub-Riemannian metric,  $(\mathbb{R}^3, \mathcal{D}, g)$  is called Heisenberg manifold [4]. For this more general, we prove that if the nonintegrability condition holds, then there are no singular geodesics for  $\mathcal{D}$ . In particular, no singular geodesics on the Heisenberg distribution.

## 2. INTRODUCTION

Ces notes intitulées "*Géométrie sous-riemannienne sur le groupe d'Heisenberg*" sont basées principalement sur les travaux cités en références [1], [3], [4] et [9]. Le groupe d'Heisenberg apparaît dans de divers domaines mathématiques. Il s'agit en effet d'un espace de référence en théorie du contrôle [10], [13], en géométrie riemannienne [6], [14] et [7] et en géométrie sous-riemannienne où ce groupe de Lie non commutatif est considéré comme le modèle prototype. A travers cet objet on présente les notions de base de cette géométrie (appelée aussi, géométrie de Carnot ou non holonome), ainsi que quelques résultats publiés ces dernières années. Dans la première partie on rappelle certaines propriétés géométriques du groupe d'Heisenberg de dimension trois. "Cette géométrie est suffisamment simple pour être décrite explicitement et suffisamment compliquée pour être intéressante [6]". La deuxième partie est consacrée à l'application des différents objets sous-riemanniens au modèle en question. Sur le groupe d'Heisenberg, un rôle important est joué par la distribution non intégrable, engendrée par les deux champs de vecteurs  $X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2\partial_t$  et  $X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1\partial_t$  :

$$\mathcal{D} : x \rightarrow \mathcal{D}_x = \text{span}_x \{X_1, X_2\}.$$

Pour cette distribution, on donne une caractérisation des courbes horizontales ainsi que des propriétés algébriques et géométriques. On aborde aussi la question

de l'accessibilité de la distribution  $\mathcal{D}$ , où on donne une démonstration assez simple du célèbre théorème de Chow. La troisième partie est consacrée au problème des géodésiques. Nous nous plaçons d'abord dans le cadre hamiltonien, où le groupe d'Heisenberg est un bon environnement pour appliquer ce formalisme. Dans ce contexte, une géodésique est une projection sur l'espace des états d'une extrémale, i.e., d'une solution du système hamiltonien, et toute géodésique est une courbe horizontale. On introduit ensuite une nouvelle structure définie par la 1-forme de connexion  $\omega = dt - 2x_2 dx_1 + 2x_1 dx_2$ , où  $\mathcal{D}_x = \ker_x \omega$ . A cette forme  $\omega$  est associée une 2-forme  $\Omega$  appelée la 2-forme de courbure  $\Omega = d\omega$ . Ce nouveau outil algébrique permet de décrire la géométrie extrinsèque de la distribution. Si la métrique sous-riemannienne est définie par les champs de vecteurs  $X_1, X_2$ , alors la géométrie intrinsèque des champs de vecteurs  $X_i$  coïncide avec la géométrie extrinsèque de  $\Omega$ . En utilisant cette structure, on donne des expressions explicites des géodésiques ainsi que leurs propriétés métriques. On aborde aussi le point de vue Lagrangien, dans le cas des champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$ , il vient alors que, les géodésiques sont les courbes horizontales qui satisfont les équations d'Euler-Lagrange. Sur le groupe d'Heisenberg, le lagrangien possède de bonnes propriétés via les translations à gauche, ce qui permet en particulier d'étudier les propriétés métriques des géodésiques. Dans la dernière section on mettra en évidence l'existence de certaines géodésiques "exceptionnelles". En géométrie sous-riemannienne, il existe en général, deux classes de géodésiques. La première, généralise le cas riemannien, ce sont les courbes qui sont projections de trajectoires du champ hamiltonien, appelées géodésiques normales (ou régulières). La deuxième, formée des courbes minimisantes qui ne sont pas projections de trajectoires du champ hamiltonien, appelées géodésiques anormales (ou singulières), a été découverte par Montgomery [11]. Notons que l'intersection des deux classes n'est pas vide. A cet effet, on fait une brève présentation et discussion des minimiseurs singuliers dans le cas des deux champs de vecteurs

$$X_1 = \partial_{x_1} + A_1(x)\partial_t, \quad X_2 = \partial_{x_2} - A_2(x)\partial_t,$$

avec  $A_1, A_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ . La distribution  $\mathcal{D} = \text{span}\{X_1, X_2\}$  est non intégrable si et seulement si

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \neq 0.$$

Si  $g$  est une métrique sous-riemannienne,  $(\mathbb{R}^3, \mathcal{D}, g)$  est appelé variété d'Heisenberg. Pour ce problème plus général, on montre que si la condition de non intégrabilité a lieu, alors pas de géodésiques anormales. En particulier, pas de géodésiques singulières pour la distribution d'Heisenberg.

### 3. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE BASE DE LA GÉOMÉTRIE DU GROUPE D'HEISENBERG

Dans ce qui suit, on va décrire certaines propriétés de la géométrie du groupe d'Heisenberg. On considère le sous-groupe  $\mathbb{H}$  de  $SL(3, \mathbb{R})$  défini par

$$(1) \quad \mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

$\mathbb{H}$  s'appelle le *groupe d'Heisenberg de dimension 3*. Il est difféomorphe à  $\mathbb{R}^3$  et sa multiplication est donnée par

$$(2) \quad (x_1, x_2, x_3)(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (x_1 + \dot{x}_1, x_2 + \dot{x}_2, x_3 + \dot{x}_3 + x_1 \dot{x}_2).$$

Notons  $L_a$ , la translation à gauche par  $a$  sur  $\mathbb{H}$  (en tant que groupe de Lie), c'est à dire le difféomorphisme de  $\mathbb{H}$  défini par  $L_a x = ax$ . Un champ de vecteurs  $X$  sur  $\mathbb{H}$  est invariant à gauche si

$$d_x L_a X_x = X_{ax},$$

où  $d_x L_a : T_x \mathbb{H} \rightarrow T_{ax} \mathbb{H}$  est la différentielle de  $L_a$  en  $x$ . L'espace tangent en l'identité  $T_e \mathbb{H}$  s'identifie à l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_3 \\ 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

On voit que  $\mathfrak{h}$  est engendrée par  $U_1, U_2, U_3$  où

$$(3) \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La structure d'algèbre de Lie de  $\mathfrak{h}$  est donnée par les crochets :

$$[U_1, U_2] = U_1 U_2 - U_2 U_1 = U_3, \quad [U_1, U_3] = 0 \text{ et } [U_2, U_3] = 0.$$

On note  $m = (x_1, x_2, x_3)$ , la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{H}$ . Les vecteurs  $U_1, U_2, U_3$  de  $T_e \mathbb{H}$  se prolongent en des champs de vecteurs invariants à gauche

$$X_1 = dL_m(U_1), \quad X_2 = dL_m(U_2), \quad X_3 = dL_m(U_3),$$

ces champs de vecteurs se calculent comme suit

$$X_1 = dL_m(U_1) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = dL_m(U_2) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = dL_m(U_3) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'espace tangent à  $\mathbb{H}$  en  $m = (x_1, x_2, x_3)$  est donc engendré par les champs de vecteurs invariants à gauche  $\{X_1, X_2, X_3\}$ . Par rapport à la base  $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$  de  $T_m \mathbb{H}$ , on obtient les relations

$$(4) \quad X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 = \partial_{x_2} + x_1 \partial_{x_3}, \quad X_3 = \partial_{x_3}.$$

En posant  $t = 4x_3 - 2x_1x_2$ , on transforme les champs de vecteurs ci dessus en les champs de vecteurs ci dessous, qu'on note aussi  $X_1, X_2, X_3$

$$X_1 = \partial_{x_1} - 2x_2\partial_t, \quad X_2 = \partial_{x_2} + 2x_1\partial_t, \quad X_3 = 4\partial_t.$$

Considérons à présent les trois champs de vecteurs :

$$(5) \quad X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2\partial_t, \quad X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1\partial_t, \quad X_3 = \partial_t,$$

on s'intéresse à la loi de groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^3$  telle que les champs de vecteurs  $X_1, X_2$  et  $X_3$  soient invariants à gauche. Comme  $\mathfrak{h}$  est nilpotente, l'application  $\exp : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{H}$  est un difféomorphisme. Si  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ , on obtient alors une structure de loi de groupe donnée par la formule de Baker–Campbell–Hausdorff,

$$(x \circ \hat{x})_i = x_i + \hat{x}_i + \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk}^i x_j \hat{x}_k + \dots,$$

où les  $c_{jk}^i$  sont les constantes de structures de  $\mathfrak{h}$  données par:

$$[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^3 c_{jk}^i X_i.$$

Dans le cas du groupe  $\mathbb{H}$  on a

$$[X_1, X_2] = -4\partial_t = -4X_3, \quad [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0,$$

d'où les constantes de structures

$$\begin{aligned} c_{12}^1 = c_{12}^2 = 0, & \quad c_{12}^3 = -4 \\ c_{13}^i = c_{23}^i = 0, & \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} (x \circ \hat{x})_1 &= x_1 + \hat{x}_1, \\ (x \circ \hat{x})_2 &= x_2 + \hat{x}_2, \\ (x \circ \hat{x})_3 &= x_3 + \hat{x}_3 + \frac{1}{2}(-4)(x_1\hat{x}_2 - x_2\hat{x}_1). \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs  $X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2\partial_t$  et  $X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1\partial_t$  sont donc invariants à gauche pour la loi de groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^3$

$$(6) \quad (x_1, x_2, x_3) \circ (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (x_1 + \hat{x}_1, x_2 + \hat{x}_2, x_3 + \hat{x}_3 - 2(x_1\hat{x}_2 - x_2\hat{x}_1)).$$

Ce groupe de Lie  $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^3, \circ)$  est appelé le groupe d'Heisenberg symétrique.

Si on identifie  $\mathbb{H}$  à  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  et on utilise la notation  $(x_1, x_2, t) = (z, t)$ , avec  $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$  et  $t \in \mathbb{R}$ , alors pour  $(z, t)$  et  $(\hat{z}, \hat{t})$  appartenant à  $\mathbb{H}$ , la loi de groupe est

$$(z, t) \circ (\hat{z}, \hat{t}) = (z + \hat{z}, t + \hat{t} + 2\operatorname{Im}(z\hat{z})).$$

Pour cette loi non commutative, l'élément neutre est  $(0, 0)$  et l'inverse d'un point  $(z, t)$  est  $(-z, -t)$ . Le centre du groupe est l'axe des  $t$ , c'est à dire  $\{[0, t], t \in \mathbb{R}\}$ .

## 4. STRUCTURE SOUS-RIEMANNIENNE SUR LE GROUPE D'HEISENBERG

**4.1. Distribution sur le groupe d'Heisenberg.** Une distribution  $\mathcal{D}$  de rang  $k$  sur une variété  $M$  est la donnée, une chaque  $p \in M$ , d'un sous-espace vectoriel  $\mathcal{D}_p$  de dimension  $k$ , de  $T_pM$ . La distribution  $\mathcal{D}$  est dite différentiable, si chaque point  $p$  possède un voisinage  $\mathcal{U}$  et  $k$  champs de vecteurs sur  $\mathcal{U}$  différentiables, notés  $X_1, \dots, X_k$  qui forment une base de  $\mathcal{D}_p$ . On écrit  $\mathcal{D}_p = \text{span}_p \{X_1, \dots, X_k\}$  et  $k$  est appelé le rang de  $\mathcal{D}$ . La distribution  $\mathcal{D}$  est dite intégrable si, pour tout  $p \in M$ , il existe une sous-variété immergée  $N_p \subset M$  contenant  $p$  et telle que  $T_qN_p = \mathcal{D}_q$  pour tout  $q \in N_p$ . On appelle  $N_p$  variété intégrale de  $\mathcal{D}$  en  $p$ . La distribution  $\mathcal{D}$  est dite involutive si  $[X, Y] \in \mathcal{D}$  pour tout  $X, Y \in \mathcal{D}$ . Cette dernière propriété est équivalente à l'intégrabilité d'après le théorème de Fröbenius. En géométrie sous-riemannienne on utilise plutôt la négation du théorème Fröbenius : La distribution  $\mathcal{D}$  est non intégrable si et seulement si elle est non involutive.

Considérons sur  $\mathbb{R}^3$  la loi de groupe (donnée par 6)

$$(x_1, x_2, x_3) \circ (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (x_1 + \dot{x}_1, x_2 + \dot{x}_2, x_3 + \dot{x}_3 - 2(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)).$$

On sait, d'après la section précédente que les champs de vecteurs (donnés par 5)

$$X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2\partial_t, \quad X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1\partial_t, \quad X_3 = \partial_t,$$

engendrent l'algèbre de Lie du groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^3, \circ)$ . On considère sur  $\mathbb{H}$ , la distribution engendrée par les deux champs de vecteurs linéairement indépendants  $X_1$  et  $X_2$  :

$$x \rightarrow \mathcal{D}_x = \text{span}_x \{X_1, X_2\}.$$

Comme  $[X_1, X_2] = -4\partial_t \notin \mathcal{D}$ , la distribution  $\mathcal{D}$  est non involutive et donc non-intégrable, d'après le théorème de Frobinus. On peut aussi définir la distribution d'Heisenberg  $\mathcal{D}$  par :

$$\mathcal{D}_x = \ker_x \omega,$$

où  $\omega$  est la 1-forme (appelée structure de contact standard) donnée par

$$(7) \quad \omega = dt - 2x_2dx_1 + 2x_1dx_2.$$

Pour une distribution définie par une 1-forme  $\omega$  sur  $\mathbb{R}^3$ , on a le résultat suivant (voir [4]) :

$$(8) \quad \mathcal{D} \text{ est involutive} \Leftrightarrow \omega \wedge d\omega = 0.$$

## 4.2. Courbes horizontales.

**Définition 4.1.** Une courbe  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dite horizontale si  $\dot{c}(s) \in \mathcal{D}_{c(s)}$ , pour tout  $s \in [0, 1]$ , i.e., le vecteur vitesse de  $c$  appartient à la distribution.

L'horizontalité est une contrainte sur les vitesses, appelée aussi contrainte non-holonomie.

Pour le groupe d'Heisenberg on a la caractérisation suivante :

**Proposition 4.1.** Une courbe  $c = (x_1, x_2, t)$  est horizontale si et seulement si

$$(9) \quad \dot{t} + 2x_1 \dot{x}_2 - 2x_2\dot{x}_1 = 0.$$

**Démonstration.** Elle vient de l'écriture suivante

$$\begin{aligned}\dot{c}(s) &= \dot{x}_1\partial_{x_1} + \dot{x}_2\partial_{x_2} + \dot{t}\partial_t \\ &= \dot{x}_1X_1 + \dot{x}_2X_2 + (\dot{t} + 2x_1\dot{x}_2 - 2x_2\dot{x}_1)\partial_t.\end{aligned}$$

D'où  $\dot{c} \in \mathcal{D}$  si et seulement si le coefficient de  $\partial_t$  est nul.

En utilisant la 1-forme  $\omega$ , la condition d'horizontalité s'écrit

$$\omega(\dot{c}) = 0.$$

En géométrie de contact, la courbe  $c$  est dite legendrienne par rapport à  $\omega$ .

**Corollaire 4.1.** *Une courbe  $c = (x_1, x_2, t)$  est horizontale si et seulement si*

$$(10) \quad \dot{c} = \dot{x}_1X_1 + \dot{x}_2X_2.$$

• **Interprétation de la composante  $t$  d'une courbe horizontale.** Si  $\sigma(s) = (x(s), y(s))$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $x(0) = 0$  et  $y(0) = 0$ . Alors l'aire orientée, limitée par l'arc  $\sigma_{[0, s]}$  et le segment de 0 à  $(x(s), y(s))$  est donnée par (voir Figure 1)

$$(11) \quad z(s) := \int_{\sigma_{[0, s]}} \frac{1}{2}(xdy - ydx).$$

Par différentiation par rapport à  $s$ , on obtient

$$(12) \quad \dot{z} = \frac{1}{2}(xy' - yx').$$

Si  $c(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$  est une courbe horizontale, c'est à dire

$$\dot{t} = 2(x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2)$$

On a peut écrire alors

$$(13) \quad \dot{t} = -4\dot{\mathcal{A}},$$

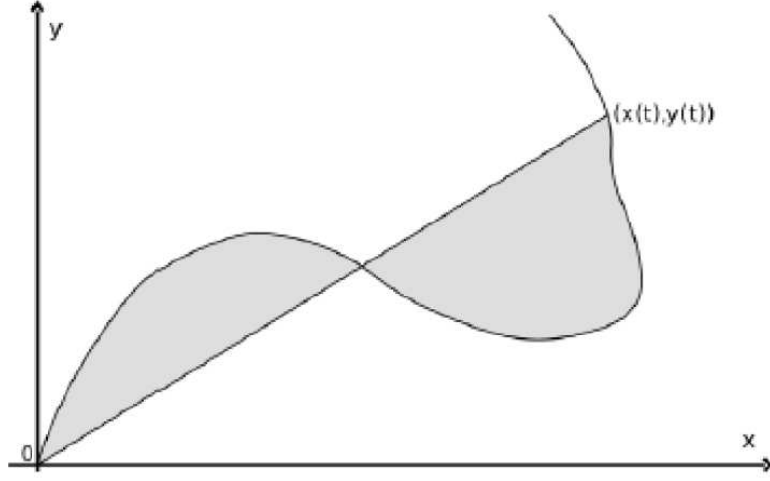
où  $\mathcal{A}$  est l'aire orientée de la région limitée par l'arc de la courbe au point  $(x_1(s), x_2(s))$  et le segment de droite de 0 à  $(x_1(s), x_2(s))$ . D'où, à un scalaire multiplicatif près, la composante  $t$  d'une courbe horizontale est égale à l'aire  $\mathcal{A}$ .

L'équation 13 est valable seulement si  $t$  est non constante, pour les courbes horizontales avec  $t$  constante, on a le résultat suivant.

**Proposition 4.2.** *Une courbe lisse  $c(s)$  est horizontale avec  $t(s) = t$  constante si et seulement si  $c(s) = (as, bs, t)$ , avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .*

**Démonstration.** En coordonnées polaires,  $x_1 = r \cos \phi$ ,  $x_2 = r \sin \phi$ , la condition d'horizontalité est équivalente à  $\dot{t} = -2r^2\dot{\phi}$ , donc si la courbe  $c(s)$  est horizontale avec  $t$  constante, alors  $\phi = \text{constante}$ . D'où la projection dans le plan  $x$  est une droite qui passe par l'origine. Il s'en suit que  $(x_1(s), x_2(s)) = (as, bs)$ . Réciproquement si  $c(s) = (as, bs, t)$  et  $t$  constante, alors on a  $2(\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2) = 2(abs - abs) = 0 = \dot{t}$ . La condition d'horizontalité 9 est vérifiée.





La proposition suivante montre que la translation à gauche d'une courbe horizontale est aussi une courbe horizontale.

**Proposition 4.3.** *Si  $c(s)$  est une courbe horizontale, alors  $\bar{c}(s) = L_a c(s)$  est une courbe horizontale pour tout  $a \in \mathbb{H}$ .*

**Démonstration.** Soient  $c = (c_1, c_2, c_3)$  et  $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$ , alors

$$(14) \quad \begin{aligned} \bar{c}_1 &= a_1 + c_1 \Rightarrow \dot{\bar{c}}_1 = \dot{c}_1 \\ \bar{c}_2 &= a_2 + c_2 \Rightarrow \dot{\bar{c}}_2 = \dot{c}_2 \\ \bar{c}_3 &= a_3 + c_3 - 2(a_1 c_2 - a_2 c_1) \Rightarrow \dot{\bar{c}}_3 = \dot{c}_3 - 2(a_1 \dot{c}_2 - a_2 \dot{c}_1). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $c$  est horizontale, l'équation 9 donne

$$\begin{aligned} \dot{\bar{c}}_3 &= \dot{c}_3 - 2(a_1 \dot{c}_2 - a_2 \dot{c}_1) \\ &= 2(\dot{c}_1 c_2 - c_1 \dot{c}_2) - 2(a_1 \dot{c}_2 - a_2 \dot{c}_1) \\ &= 2(\dot{c}_1(a_2 + c_2) - \dot{c}_2(a_1 + c_1)) \\ &= 2(\dot{\bar{c}}_1 \bar{c}_2 - \bar{c}_2 \dot{\bar{c}}_1). \end{aligned}$$

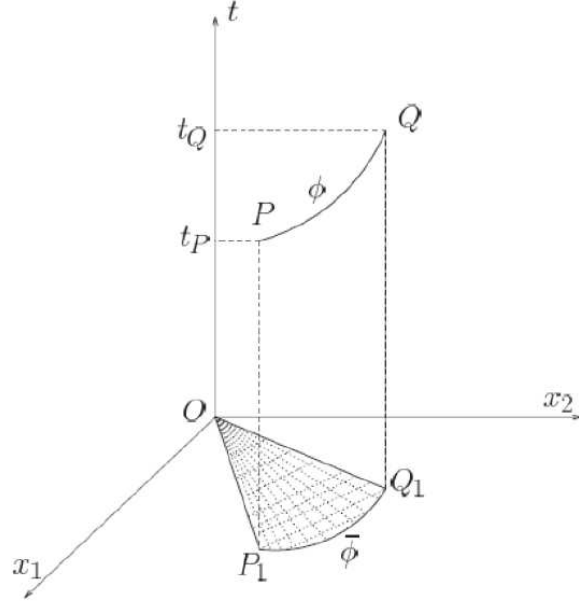
De l'équation 9 il vient que,  $\bar{c}(s)$  est horizontale.

**Corollaire 4.2.** *Si  $c(s)$  est horizontale, alors le vecteur vitesse de la courbe horizontale  $\bar{c}(s) = L_a c(s)$  est*

$$(15) \quad \dot{\bar{c}}(s) = dL_a \dot{c}(s) = \dot{c}_1(s) X_1 |_{\bar{c}(s)} + \dot{c}_2(s) X_2 |_{\bar{c}(s)}$$

**Démonstration.** Comme  $\bar{c}(s)$  est horizontale, il vient des équations 10 et 14

$$\begin{aligned} \dot{\bar{c}}(s) &= \dot{\bar{c}}_1(s) X_1 |_{\bar{c}(s)} + \dot{\bar{c}}_2(s) X_2 |_{\bar{c}(s)} \\ &= \dot{c}_1(s) dL_a X_1 |_{c(s)} + \dot{c}_2(s) dL_a X_2 |_{c(s)} \\ &= dL_a (\dot{c}_1(s) X_1 |_{c(s)} + \dot{c}_2(s) X_2 |_{c(s)}) \\ &= dL_a \dot{c}(s) \end{aligned}$$



**4.3. Accessibilité de la distribution d'Heisenberg.** Etant donnée une distribution  $\mathcal{D}$  sur une variété  $M$ , le problème de l'accessibilité de  $\mathcal{D}$  est le suivant : Peut-t-on joindre deux points quelconques de  $M$  par une courbe horizontale. Une réponse à cette question est donnée par Chow en 1939, dans le contexte suivant.

Notons  $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}$  et pour  $s \geq 1$ , posons  $\mathcal{D}^{s+1} = \mathcal{D}^s + [\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^s]$ , où  $[\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^s] = \text{span}\{[X, Y]; X \in \mathcal{D}^1, Y \in \mathcal{D}^s\}$  et  $\text{Lie}(\mathcal{D}) = \bigcup_{s \geq 1} \mathcal{D}^s$ . La distribution  $\mathcal{D}$  est dite engendrée par des crochets si  $\forall p \in M, \text{Lie}(\mathcal{D})_p = T_p M$ . Pour ce type de distributions on a le résultat suivant (théorème de Chow), qui stipule que, si la variété est connexe et  $\mathcal{D}$  est engendrée par des crochets, alors on peut joindre deux points quelconques par une courbe horizontale. Dans le cas de la distribution d'Heisenberg, on a  $[X_1, X_2] = -4\partial_t$  et  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$  qui sont linéairement indépendants en chaque point  $p = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3$  et

$$(16) \quad \mathcal{D}_p^2 = \text{span}\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}_p = T_p \mathbb{R}^3.$$

Nous avons alors le théorème d'accessibilité suivant :

**Théorème 1.** (de Chow) *Pour le groupe d'Heisenberg, on peut joindre deux points quelconques par une courbe horizontale lisse.*

**Démonstration.** Soient  $P$  et  $Q$  deux points de  $\mathbb{R}^3$  et  $t_P$  et  $t_Q$  les composantes sur l'axe des  $t$  des coordonnées de  $P$  et  $Q$ . Supposons que  $t_P \neq t_Q$  et posons  $t_P - t_Q = \alpha \neq 0$ . Soient  $P_1$  et  $Q_1$ , les projections de  $P$  et  $Q$  sur le plan  $x$  (voir figure 2). On considère dans le plan  $x$ , la courbe  $\bar{\phi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\bar{\phi}(0) = P_1$  et  $\bar{\phi}(1) = Q_1$  et que l'aire située entre le graphe de  $\bar{\phi}$  et les segments  $OP_1$  et  $OQ_1$  soit égale à  $\alpha/4$ . Si  $\bar{\phi}(s) = (x_1(s), x_2(s))$ , on pose

$$(17) \quad t(s) = t_p + 2 \int_0^s (x_2(v)\dot{x}_1(v) - x_1(v)\dot{x}_2(v))dv.$$

Alors, la courbe  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\phi(s) = (\bar{\phi}(s), t(s))$  est horizontale et lisse  $[\dot{t}(s) = 2(x_2(s)\dot{x}_1(s) - x_1(s)\dot{x}_2(s))]$ , qui joint  $P$  et  $Q$ . En effet on a d'une part,

$$\phi(0) = (\bar{\phi}(0), t(0)) = (P_1, t_p) = P.$$

Et d'autre part, comme la composante  $t$  vérifie la relation 13, il vient par intégration entre 0 et 1

$$\begin{aligned} t(1) &= t(0) - 4(\mathcal{A}(1) - \mathcal{A}(0)) \\ &= t(0) - 4(\alpha/4) = t(0) - \alpha \\ &= t_p - (t_P - t_Q) = t_Q, \end{aligned}$$

d'où,

$$\phi(1) = (\bar{\phi}(1), t(1)) = (Q_1, t_Q) = Q.$$

Pour terminer la preuve, on va se servir de la structure de groupe de Lie. Posons,  $P = P(x_1, y_1, t_1)$  et  $Q = Q(x_2, y_2, t_2)$  et translatons à gauche les points  $P$  et  $Q$  par  $(-x_1, -y_1, -t_1)$ , on obtient respectivement les points  $O(0, 0, 0)$  et  $S(\dot{x}, \dot{y}, \dot{t})$ , avec

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_2 - x_1, \\ \dot{y} &= y_2 - y_1, \\ \dot{t} &= t_2 - t_1 - 2(y_1x_2 - x_1y_2). \end{aligned}$$

• Si  $\dot{t} \neq 0$ , on procède comme plus haut, on obtient une courbe horizontale lisse  $c(s)$  joignant  $O$  et  $S$ .

• Si  $\dot{t} = 0$ , alors  $c(s) = (s\dot{x}, s\dot{y}, 0)$  est une courbe horizontale lisse (Proposition 4.2) joignant  $O$  et  $S$ .

Pour les deux cas, si on note  $c(s) = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$  la courbe horizontale lisse joignant  $O$  et  $S$ , alors

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{c}(s) &= L_{(x_1, y_1, t_1)}c(s) = (x_1, y_1, t_1) \circ c(s) \\ &= (x_1 + c_1(s), y_1 + c_2(s), t_1 + c_3(s) - 2(x_1c_2(s) - y_1c_1(s))), \end{aligned}$$

est une courbe horizontale lisse (voir Proposition 4.3), joignant  $P$  et  $Q$ .

## 5. LES GÉODÉSIIQUES SOUS-RIEMANNIENNES SUR LE GROUPE D'HEISENBERG

**5.1. Présentation du problème.** Soit  $\mathcal{D}$  une distribution d'Heisenberg. Une métrique sous-riemannienne  $g$  sur  $\mathcal{D}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dont la restriction à chaque fibre  $\mathcal{D}_x$  est une forme quadratique définie positive. On peut définir une métrique sous-riemannienne sur  $\mathcal{D}$  en décrétant les champs de vecteurs  $\{X_1, X_2\}$  orthonormés. On dira que la métrique est définie par  $X_1$  et  $X_2$ . Soient  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  deux points distincts. D'après le théorème de Chow, on peut les joindre par

une courbe horizontale lisse. On s'intéresse au problème de caractériser les courbes horizontales  $c : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'extrémités  $c(0) = P$  et  $c(\tau) = Q$  pour lesquelles

$$\ell(c) = \int_0^\tau |\dot{c}(s)|_g ds.$$

est minimale.  $\ell$  est la longueur de la courbe horizontale  $c$  par rapport à la métrique  $g$ . L'énergie le long de la courbe horizontale  $c$  est donnée par

$$I(c) = \frac{1}{2} \int_0^\tau |\dot{c}(s)|_g^2 ds.$$

Comme dans le cas riemannien, on remarque que pour minimiser la longueur il suffit de minimiser l'énergie. Ceci découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\varphi}(s)|_g^2 ds \geq \frac{1}{2} \left( \int_0^1 |\dot{\varphi}(s)|_g ds \right)^2.$$

Si la courbe  $c$  est paramétrée par la longueur d'arc,  $|\dot{c}(s)| = 1$ , alors il est équivalent de minimiser la longueur ou l'énergie.

Si  $c(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$  est une courbe horizontale, alors

$$\dot{c} = \dot{x}_1 X_1 + \dot{x}_2 X_2,$$

et si  $g$  est définie par  $\{X_1, X_2\}$ , il vient

$$|\dot{c}|_g^2 = g(\dot{c}, \dot{c}) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2.$$

Le théorème de Chow (Théorème 1) nous permet de définir une fonction distance  $d_C$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Si  $(P, Q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$d_C(P, Q) = \inf \{ \ell(c) \mid c : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ horizontale, } c(0) = P, \quad c(\tau) = Q \}.$$

Il est bien clair que  $d_C$ , appelée la distance de Carnot-Carathéodory, satisfait tous les axiomes d'une distance.

Nous allons maintenant caractériser les géodésiques sous-riemanniennes, à ce effet, introduisons d'abord, la fonction de Hamilton. En général les géodésiques obtenues par cette procédure sont appelées normales.

**5.2. Formalisme hamiltonien sur le groupe d'Heisenberg.** On considère la distribution d'Heisenberg  $x \rightarrow \mathcal{D}_x = \text{span}_x \{X_1, X_2\}$ , avec

$$X_1 = \partial_{x_1} + 2x_2 \partial_t, \quad X_2 = \partial_{x_2} - 2x_1 \partial_t.$$

La fonction d'Hamilton  $H : T_{(x,t)}^* \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par l'expression

$$H(\xi, \theta, x, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle X_i(x, t), (\xi, \theta) \rangle,$$

où  $\langle, \rangle$  est le produit scalaire usuel sur  $T_{(x,t)} \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ . Dans notre cas, le hamiltonien s'écrit

$$(19) \quad H(\xi, \theta, x, t) = \frac{1}{2}(\xi_1 + 2x_2\theta)^2 + \frac{1}{2}(\xi_2 - 2x_1\theta)^2.$$

Le système hamiltonien est donné par

$$(20) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \xi} & \dot{t} &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \dot{\xi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} & \dot{\theta} &= -\frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

Les solutions  $c(s) = (x(s), t(s), \xi(s), \theta(s))$  du système 20 sont appelées les extrémales. On peut alors donner la définition suivante

**Définition 5.1.** *Etant donnés deux points  $P(x_0, t_0), Q(x_1, t_1) \in \mathbb{R}^3$ . Une géodésique entre  $P$  et  $Q$  est la projection sur l'espace  $(x, t)$  d'une extrémale  $c : [0; \tau] \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui satisfait les conditions aux limites :*

$$(x(0), t(0)) = (x_0, t_0), \quad (x(\tau), t(\tau)) = (x_1, t_1).$$

Les géodésiques obtenues par le formalisme hamiltonien sont appelées normales ou (ou régulières).

**Attention.** En géométrie sous-riemannienne, il existe en général des courbes minimisantes qui ne sont pas des extrémales, appelées minimiseurs anormaux (ou singuliers). Pour le groupe d'Heisenberg, il n'y a pas de minimiseurs anormaux comme on va voir plus loin.

**Proposition 5.1.** *Pour le groupe d'Heisenberg, toute géodésique est une courbe horizontale.*

**Démonstration.** Soit  $c(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$  une géodésique. Le système hamiltonien 20 donne :

$$\dot{x}_1 = \xi_1 + 2x_2\theta, \quad \dot{x}_2 = \xi_2 - 2x_1\theta,$$

et alors

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ &= 2x_2(\xi_1 + 2x_2\theta) - 2x_1(\xi_2 - 2x_1\theta) \\ &= 2x_2\dot{x}_1 - 2x_1\dot{x}_2. \end{aligned}$$

qui est la condition d'horizontalité 9.

• **Résolution explicite du système hamiltonien.** Comme  $H$  ne dépend pas explicitement de  $t$ , on a

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

donc  $\theta$  est constante le long de la solution.

Les équations

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \xi_2},$$

donnent

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= \xi_1 + 2x_2\theta \\ \dot{x}_2 &= \xi_2 - 2x_1\theta. \end{cases}$$

Par différentiation, on obtient

$$(22) \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 &= \dot{\xi}_1 + 2\dot{x}_2\theta \\ \ddot{x}_2 &= \dot{\xi}_2 - 2\dot{x}_1\theta \end{cases}$$

En utilisant  $\dot{\xi}_i = -\partial H/\partial x_i$  et le système 21 on obtient

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{\xi}_1 &= 2\theta(\xi_2 - 2x_1\theta) &= 2\theta\dot{x}_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -2\theta(\xi_1 + 2x_2\theta) &= -2\theta\dot{x}_1. \end{cases}$$

Des systèmes 22 et 23, on obtient

$$(24) \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 &= 4\theta\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 &= -4\theta\dot{x}_1, \end{cases}$$

où  $\theta$  est constante. Finalement, on peut écrire le système 24 sous la forme

$$(25) \quad \ddot{x}(s) = 4\theta\mathcal{J}\dot{x}(s),$$

avec

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La relation 25 décrit la projection de la géodésique sur l'espace  $x$ . En posant  $\dot{x}(s) = y(s)$ , l'équation 25 devient

$$\dot{y}(s) = 4\theta\mathcal{J}y(s).$$

Sa solution est

$$y(s) = e^{4\theta\mathcal{J}s}y(0),$$

donc

$$\dot{x}(s) = e^{4\theta\mathcal{J}s}y(0)$$

En intégrant et en utilisant le fait que,  $\mathcal{J}$  et  $e^{4\theta\mathcal{J}s}$  commutent, on obtient

$$(26) \quad \begin{aligned} x(s) &= x(0) + \int_0^s e^{4\theta\mathcal{J}u}y(0)du \\ &= x(0) + \frac{1}{4\theta}\mathcal{J}^{-1}e^{4\theta\mathcal{J}s}y(0) \Big|_{u=0}^{u=s} \\ &= x(0) - \frac{1}{4\theta}\mathcal{J}^{-1}e^{4\theta\mathcal{J}s}y(0) + \frac{1}{4\theta}\mathcal{J}^{-1}y(0) \\ &= e^{4\theta\mathcal{J}s}K + C. \end{aligned}$$

où  $K = -\mathcal{J}y(0)/(4\theta)$  et  $C = x(0) + K$ .

**Lemme 5.1.** Si  $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $e^{4\theta\mathcal{J}s} = R_{4\theta s}$ , où  $R_{4\theta s}$  désigne la rotation d'angle  $4\theta s$  dans le plan des  $x$ .

**Démonstration.**

$$\begin{aligned}
e^{4\theta\mathcal{J}s} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4\theta s)^n \mathcal{J}^n}{n!} = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4\theta s)^{4k}}{(4k)!} + \mathcal{J} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4\theta s)^{4k+1}}{(4k+1)!} \\
&- I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4\theta s)^{4k+2}}{(4k+2)!} - \mathcal{J} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4\theta s)^{4k+3}}{(4k+3)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(4\theta s)^{4k}}{(4k)!} - \frac{(4\theta s)^{4k+2}}{(4k+2)!} & \frac{(4\theta s)^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{(4\theta s)^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ -\frac{(4\theta s)^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{(4\theta s)^{4k+3}}{(4k+3)!} & \frac{(4\theta s)^{4k}}{(4k)!} - \frac{(4\theta s)^{4k+2}}{(4k+2)!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(4\theta s) & \sin(4\theta s) \\ -\sin(4\theta s) & \cos(4\theta s) \end{pmatrix} \\
&= R_{4\theta s}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 5.1 et l'équation 26, on obtient

$$x(s) = R_{4\theta s}K + C,$$

d'où

$$|x(s) - C| = |R_{4\theta s}K| = |K| = \text{constante},$$

$x(s)$  décrit donc un cercle de centre  $C$  et de rayon

$$|K| = \left| \frac{-\mathcal{J}y(0)}{4\theta} \right| = \left| \frac{y(0)}{4\theta} \right| = \left| \frac{\dot{x}(0)}{4\theta} \right|$$

**Proposition 5.2.** *On considère une géodésique joignant les points  $P(x_0, t_0)$  et  $Q(x_1, t_1)$ , avec  $t_0 \neq t_1$ .*

(i) *La projection de la géodésique sur le plan des  $x$  est un cercle ou un morceau de cercle d'extrémités  $x_0$  et  $x_1$ .*

(ii) *Si la projection est un cercle complet, avec  $x_0 = x_1$ , alors son aire est donnée par*

$$\frac{|t_1 - t_0|}{4}.$$

**Démonstration.** i) Comme pour la solution du système hamiltonien discutée plus haut.

(ii) Une géodésique est une courbe horizontale (Proposition 5.1), alors l'aire  $\mathcal{A}$  de sa projection dans le plan  $x$  et sa composante  $t$  vérifient la relation

$$d\mathcal{A} = -\frac{1}{4}dt.$$

Par intégration, on obtient

$$\int_0^1 d\mathcal{A} = -\int_0^1 \frac{1}{4}dt = \frac{t_1 - t_0}{4}.$$

Dans la proposition, 5.1 on a vu que pour la distribution d'Heisenberg, toute géodésique est une courbe horizontale. La réciproque est fautive.

En effet,  $c(s) = (s^2/2, s, s^3/3)$  est une courbe horizontale pour le groupe d'Heisenberg, car elle vérifie la relation 9:

$$\dot{t}(s) = s^2 = 2(s^2 - s^2/2) = 2(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2).$$

Mais d'autre part, le système 24 donne  $4\theta = 1$  et  $0 = -4\theta s$ , contradiction.

**5.3. Géométrie extrinsèque du groupe d'Heisenberg.** Considérons la distribution d'Heisenberg  $x \rightarrow \mathcal{D}_x = \text{span}_x \{X_1, X_2\}$ . Dans cette section, on va introduire une nouvelle structure sur  $\mathcal{D}$  basée sur la notion de la 1-forme de connexion. C'est un outil algébrique qui va nous permettre en particulier de donner des expressions explicites des géodésiques sous-riemanniennes.

**Définition 5.2.** Une 1-forme de connexion est une forme  $\omega \in T^*\mathbb{R}^3$  non nulle telle que

$$\ker_x \omega = \mathcal{D}_x.$$

La forme  $\omega$  est unique à un facteur multiplicatif près. Pour le groupe d'Heisenberg, on choisit la 1-forme standard.

$$\omega = dt - 2x_2 dx_1 + 2x_1 dx_2,$$

avec la propriété  $\omega(\partial_t) = 1$ .

À la 1-forme de connexion  $\omega \in T^*\mathbb{R}^3$ , on associe une 2-forme, appelée la 2-forme de courbure comme suit

**Définition 5.3.** La 2-forme de courbure de la distribution  $\mathcal{D}$  est  $\Omega : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ ,

$$(27) \quad \Omega(U, V) = d\omega(U, V).$$

Pour la distribution d'Heisenberg on a

$$(28) \quad \Omega = 4dx_1 \wedge dx_2.$$

Si  $\mathcal{D}$  appartient à la géométrie sous-riemannienne intrinsèque, la 2-forme  $\Omega$  décrit la géométrie extrinsèque du groupe d'Heisenberg. En général la 2-forme  $\Omega$  décrit le degré de non-intégrabilité de la distribution.

**Définition 5.4.** La paire  $(\mathbb{R}^3, \omega)$  est appelée variété de contact si  $\omega \wedge \Omega \neq 0$ .

Pour notre cas on a

$$(29) \quad \omega \wedge \Omega = 4dt \wedge dx_1 \wedge dx_2,$$

Le groupe d'Heisenberg est donc une variété de contact. Inversement et d'après le théorème de Darboux, toute variété de contact est localement un groupe d'Heisenberg.

• **Plan osculateur.** Le plan osculateur en une courbe  $c(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$  est l'espace défini par :

$$\text{span} \{\dot{c}(s), \ddot{c}(s)\}.$$

**Proposition 5.3.** Soit  $c(s)$  une courbe. Alors  $c(s)$  est horizontale si et seulement si le plan osculateur en  $c(s)$  coïncide avec  $\mathcal{D}_{c(s)}$ , pour tout  $s$ .



**Démonstration.** Si  $\text{span} \{\dot{c}(s), \ddot{c}(s)\} = \mathcal{D}_{c(s)}$ , alors  $\dot{c}(s) \in \mathcal{D}_{c(s)}$  et la courbe  $c(s)$  est horizontale. Inversement si  $c(s)$  est horizontale, alors  $\dot{c}(s) \in \mathcal{D}_{c(s)}$ . Il suffit de montrer que  $\ddot{c}(s) \in \mathcal{D}_{c(s)}$ . La condition d'horizontalité donne

$$\dot{t} = 2x_2\dot{x}_1 - 2x_1\dot{x}_2.$$

D'où, par différentiation

$$\begin{aligned} \ddot{t} &= 2\dot{x}_2\dot{x}_1 + 2x_2\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 - 2x_1\ddot{x}_2 \\ &= 2x_2\ddot{x}_1 - 2x_1\ddot{x}_2. \end{aligned}$$

Le vecteur accélération le long de  $c(s)$  est

$$\begin{aligned} \ddot{c} &= \ddot{x}_1\partial_{x_1} + \ddot{x}_2\partial_{x_2} + \ddot{t}\partial_t \\ &= \ddot{x}_1(\partial_{x_1} + 2x_2\partial_t) - 2x_2\ddot{x}_1\partial_t + \ddot{x}_2(\partial_{x_2} - 2x_1\partial_t) + 2x_1\ddot{x}_2\partial_t + \ddot{t}\partial_t \\ &= \ddot{x}_1X_1 + \ddot{x}_2X_2 + (\ddot{t} - 2x_2\ddot{x}_1 + 2x_1\ddot{x}_2)\partial_t \\ &= \ddot{x}_1X_1 + \ddot{x}_2X_2 \end{aligned}$$

et  $\ddot{c} \in \mathcal{D}_c$ .

**Corollaire 5.1.** *Pour toute courbe horizontale  $c$  on a*

$$(30) \quad \begin{aligned} \ddot{c} &= \ddot{x}_1X_1 + \ddot{x}_2X_2 \\ \ddot{t} &= 2x_2\ddot{x}_1 - 2x_1\ddot{x}_2. \end{aligned}$$

**Définition 5.5.** *La structure complexe du plan horizontale est la donnée d'une application*

$$J : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

avec

$$(31) \quad \begin{cases} J(X_1) = -X_2 \\ J(X_2) = X_1 \end{cases}$$

On va se servir de cette structure pour écrire les équations des géodésiques sur le groupe d'Heisenberg.

**Proposition 5.4.** *Une courbe  $c$  est une géodésique sur le groupe d'Heisenberg si et seulement si*

- (i)  $c$  est horizontale et
- (ii)  $c$  satisfait

$$(32) \quad \ddot{c} = 4\theta J\dot{c}$$

**Démonstration.** Si  $c(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$  est une géodésique, alors d'après la proposition 5.1,  $c(s)$  est horizontale. En utilisant le corollaire 5.1 et le système 24 on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{c} &= \ddot{x}_1X_1 + \ddot{x}_2X_2 \\ &= 4\theta\dot{x}_2X_1 - 4\theta\dot{x}_1X_2 \\ &= 4\theta\dot{x}_2J(X_2) + 4\theta\dot{x}_1J(X_1) \\ &= 4\theta J(\dot{x}_1X_1 + \dot{x}_2X_2) \\ &= 4\theta J(\dot{c}). \end{aligned}$$

Réciproquement. Supposons que (i) et (ii) ont lieu et montrons que  $c$  est une géodésique en utilisant la définition 5.1. La condition d'horizontalité (i) peut s'écrire  $\dot{t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ , qui est l'équation hamiltonnienne pour  $t$  et l'équation 32 conduit au système 24. Soient  $x_1(s)$  et  $x_2(s)$  les solutions de ce système et on définit dans l'espace cotangent, la courbe suivante

$$\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s), \xi_1(s), \xi_2(s), \theta),$$

avec

$$\xi_1 = \dot{x}_1 - 2x_2(s)\theta, \quad \xi_2 = \dot{x}_2 + 2x_1(s)\theta,$$

où  $\theta$  est constante. Alors  $\gamma(s)$  est une extrémale du système 20 associée au hamiltonien 19 et sa projection sur l'espace  $(x, t)$  est une géodésique. Par conséquent  $c(s)$  est une géodésique.

**Proposition 5.5.** *Soit  $g$  une métrique sous-riemannienne définie par les champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$ . Alors  $g$  possède les propriétés suivantes :*

- i)  $g(JU, JV) = g(U, V)$ , pour tout  $U, V \in \mathcal{D}$ , c'est à dire  $g$  devient une métrique Kählerienne sur  $\mathcal{D}_x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,
- ii)  $\Omega(U, V) = 4g(U, JV)$ , pour tout  $U, V \in \mathcal{D}$ .

**Démonstration.** i). Soient  $U, V \in \mathcal{D}$ ,  $U = U^1X_1 + U^2X_2$  et  $V = V^1X_1 + V^2X_2$ . En utilisant les transformations  $JX_1 = -X_2$  et  $JX_2 = X_1$  on obtient :

$$\begin{aligned} JU &= -U^1X_2 + U^2X_1 \\ JV &= -V^1X_2 + V^2X_1. \end{aligned}$$

Comme  $X_1$  et  $X_2$  sont orthonormés, alors

$$\begin{aligned} g(JU, JV) &= g(U^2X_1 - U^1X_2, V^2X_1 - V^1X_2) \\ &= U^1V^1 + U^2V^2 \\ &= g(U^1X_1 + U^2X_2, V^1X_1 + V^2X_2) \\ &= g(U, V), \end{aligned}$$

et la métrique  $g$  est invariante par  $J$ .

ii)

$$\begin{aligned} \Omega(U, V) &= \Omega(U^1X_1 + U^2X_2, V^1X_1 + V^2X_2) \\ &= (U^1V^2 - U^2V^1) \Omega(X_1, X_2) \\ &= (U^1V^2 - U^2V^1) (X_1\omega(X_2) - X_2\omega(X_1) - \omega([X_1, X_2])) \\ &= 4(U^1V^2 - U^2V^1)\omega(\partial_t) \\ &= 4(U^1V^2 - U^2V^1) \\ &= 4g(U^1X_1 + U^2X_2, V^2X_1 - V^1X_2) \\ &= 4g(U, JV). \end{aligned}$$

On dit que  $\Omega$  est la 2-forme fondamentale associée à la métrique Kählerienne  $g$ .

De l'anti-symétrie de  $\Omega$  il, découle,

**Corollaire 5.2.** *Pour tout  $U \in \mathcal{D}$  on a*

$$(33) \quad g(U, JU) = 0.$$

• **Interprétation géométrique de  $\Omega$ .**

On peut interpréter  $\Omega$  comme une aire. Ceci est une conséquence du calcul suivant

$$\begin{aligned}\Omega(U, V) &= 4dx_1 \wedge dx_2(U, V) \\ &= 4 \begin{vmatrix} dx_1(U) & dx_1(V) \\ dx_2(U) & dx_2(V) \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{vmatrix} U(x_1) & V(x_1) \\ U(x_2) & V(x_2) \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} U^1 & V^1 \\ U^2 & V^2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

**Proposition 5.6.** *Soit  $c(s)$  une géodésique, alors pour tout  $U \in \mathcal{D}$  on a*

$$(34) \quad \theta\Omega(U, \dot{c}) = g(U, \ddot{c}).$$

**Démonstration.** En effet,  $\theta\Omega(U, \dot{c}) = 4\theta g(U, J\dot{c}) = g(U, \ddot{c})$ .

Pour  $\theta = 0$ , on obtient  $g(U, \ddot{c}) = 0$  pour tout  $U \in \mathcal{D}$ , d'où  $\ddot{c} = 0$  et  $\ddot{c}_1(s) = \ddot{c}_2(s) = 0$ . Ce qui conduit au résultat déjà vu (Proposition 4.2).

**Corollaire 5.3.** *Si  $c(s)$  est une géodésique avec  $\theta = 0$ , alors*

$$c(s) = (as, bs, t_0),$$

où  $t_0$  est constante.

La proposition suivante, donne quelques propriétés de la vitesse et de l'accélération via la métrique sous-riemannienne.

**Proposition 5.7.** *Soit  $c(s)$  une géodésique. Alors*

(i) *La vitesse  $\dot{c}$  et l'accélération  $\ddot{c}$  sont perpendiculaires par rapport à la métrique sous-riemannienne  $g$ .*

(ii) *La magnitude de  $\dot{c}$  (rep. de  $\ddot{c}$ ) est constante le long de la géodésique par rapport à la métrique sous-riemannienne  $g$ .*

**Démonstration.** i) On a  $g(\dot{c}, \ddot{c}) = \theta\Omega(\dot{c}, \dot{c}) = 0$ .

ii) Par différentiation on obtient

$$\frac{d}{ds}g(\dot{c}, \dot{c}) = g(\ddot{c}, \dot{c}) + g(\dot{c}, \ddot{c}) = 0.$$

iii) Comme  $\ddot{c}$  est horizontale, alors l'équation 32, la Proposition 5.5 et (ii) donnent

$$g(\ddot{c}, \ddot{c}) = 16\theta^2 g(\dot{c}, \dot{c}) = \text{constante.}$$

**Remarque 5.1.** *Dans  $\mathbb{R}^3$ , la courbure d'une courbe  $c(s)$  est la fonction définie par*

$$k(s) = |\dot{T}(s)|,$$

où  $T(s) = \frac{\dot{c}(s)}{|\dot{c}(s)|}$  est le vecteur tangent unitaire. Si la courbe est paramétrée par la longueur d'arc,  $|\dot{c}(s)| = 1$ , la courbure est alors

$$k(s) = |\ddot{c}(s)|.$$

**Proposition 5.8.** *La courbure d'une courbe géodésique est constante,*

$$k(s) = 4\theta.$$

**Démonstration.** Supposons que la géodésique est paramétrée par la longueur d'arc, alors

$$k(s)^2 = g(\ddot{c}, \ddot{c}) = 16\theta^2 g(\dot{c}, \dot{c}) = 16\theta^2.$$

Dans la proposition suivante on donne la structure complexe de la distribution en fonction de  $\Omega$  et des champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$ .

**Proposition 5.9.** *Pour tout  $U \in \mathcal{D}$  on a*

$$J(U) = \frac{1}{4} (\Omega(X_1, U)X_1 + \Omega(X_2, U)X_2).$$

**Démonstration.** A cause de la linéarité, il suffit de montrer la relation pour les champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$ . Remarquons d'abord que

$$\Omega(X_1, X_2) = 4dx_1 \wedge dx_2(X_1, X_2) = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 = -\Omega(X_2, X_1),$$

d'où

$$JX_1 = -X_2 = \frac{1}{4}\Omega(X_2, X_1)X_2 = \frac{1}{4}(\Omega(X_1, X_1)X_1 + \Omega(X_2, X_1)X_2),$$

$$JX_2 = -X_1 = \frac{1}{4}\Omega(X_1, X_2)X_1 = \frac{1}{4}(\Omega(X_1, X_2)X_1 + \Omega(X_2, X_2)X_2).$$

**5.4. Formalisme lagrangien sur le groupe d'Heisenberg.** On associe au hamiltonien 19, la fonction  $L : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , appelée lagrangien, qui est la transformée de Legendre de  $H$  en  $(\dot{x}, \dot{t})$  :

$$(35) \quad \begin{aligned} L(x, t, \dot{x}, \dot{t}) &= \max_{\xi, \theta} (\xi_1 \dot{x}_1 + \xi_2 \dot{x}_2 + \theta \dot{t} - H(\xi, \theta, x, t)) \\ &= \max_{\xi, \theta} F(x, t, \dot{x}, \dot{t}, \xi, \theta). \end{aligned}$$

C'est la distance maximale entre l'hyperplan  $\langle \xi, \dot{x} \rangle + \theta \dot{t}$  et la surface convexe donnée par le hamiltonien  $H$  dans  $\mathbb{R}^6$ .

Le maximum recherché satisfait,

$$(36) \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0.$$

Les équations 36 s'écrivent

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \xi_2}, \quad \dot{t} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0,$$

d'où

$$(37) \quad \dot{x}_1 = \xi_1 + 2x_2\theta, \quad \dot{x}_2 = \xi_2 - 2x_1\theta, \quad \dot{t} = 2x_2\dot{x}_1 - 2x_1\dot{x}_2.$$

En utilisant les relations 37, le lagrangien devient:

$$\begin{aligned}
L(x, t, \dot{x}, \dot{t}) &= \xi_1 \dot{x}_1 + \xi_2 \dot{x}_2 + \theta \dot{t} - \frac{1}{2}(\xi_1 + 2x_2\theta)^2 - \frac{1}{2}(\xi_2 - 2x_1\theta)^2 \\
&= (\dot{x}_1 - 2x_2\theta)\dot{x}_1 + (\dot{x}_2 + 2x_1\theta)\dot{x}_2 + \theta \dot{t} - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \\
&= (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \theta(\dot{t} - 2x_2\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_2) - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \\
&= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \theta(\dot{t} - 2x_2\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_2).
\end{aligned}$$

En utilisant la 1-forme de connexion  $\omega$ , on peut écrire

$$(38) \quad L(c, \dot{c}) = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \theta\omega(\dot{c}),$$

où  $c = (x_1, x_2, t)$ . On s'intéresse au problème de minimiser l'intégrale (l'action)

$$(39) \quad S(c, \tau) = \int_0^\tau L(c, \dot{c}) ds.$$

L'action est composée de deux expressions : l'énergie cinétique et la contrainte non holonome. La constante  $\theta$  est appelée, multiplicateur de Lagrange. Les courbes  $c$  qui sont les points critiques pour l'action  $S(c, \tau)$  doivent satisfaire le système d'équations d'Euler-Lagrange

$$(40) \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{c}} \right) = \frac{\partial L}{\partial c}.$$

**Proposition 5.10.** *Une solution du système d'équations d'Euler-Lagrange 40 est une géodésique si et seulement si elle est une courbe horizontale.*

**Démonstration.** Toute géodésique est une courbe horizontale. Il suffit de montrer que toute courbe horizontale solution du système 40 est une géodésique.

Si  $c = (x_1, x_2, t)$ , le système 40 s'écrit

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{\partial L}{\partial t},$$

ce qui donne

$$\ddot{x}_1 = 4\theta\dot{x}_2, \quad \ddot{x}_2 = -4\theta\dot{x}_1, \quad \dot{\theta} = 0.$$

On conclut la preuve grâce à la proposition 5.4.

**Proposition 5.11.** *Le lagrangien 38 est invariant par translation à gauche par rapport à la structure de groupe d'Heisenberg, i.e.*

$$L(\bar{c}, \dot{\bar{c}}) = L(c, \dot{c}),$$

où  $\bar{c} = L_a c$ , pour tout  $a \in \mathbb{H}$ .

**Démonstration.** Si  $c = (c_1, c_2, c_3)$ ,  $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$  et  $a = (a_1, a_2, a_3)$ , alors

$$\begin{aligned}
\bar{c}_1 &= a_1 + c_1 \Rightarrow \dot{\bar{c}}_1 = \dot{c}_1 \\
\bar{c}_2 &= a_2 + c_2 \Rightarrow \dot{\bar{c}}_2 = \dot{c}_2 \\
\bar{c}_3 &= a_3 + c_3 - 2(a_1\dot{c}_2 - a_2\dot{c}_1) \Rightarrow \dot{\bar{c}}_3 = \dot{c}_3 - 2(a_1\dot{c}_2 - a_2\dot{c}_1),
\end{aligned}$$

alors l'énergie cinétique est invariante à gauche

$$\frac{1}{2}(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2) = \frac{1}{2}(\dot{\bar{c}}_1^2 + \dot{\bar{c}}_2^2).$$

La contrainte d'horizontalité

$$\begin{aligned} \dot{\bar{c}}_3 - 2\dot{\bar{c}}_2\dot{\bar{c}}_1 + 2\dot{\bar{c}}_1\dot{\bar{c}}_2 &= \dot{c}_3 - 2(a_1\dot{c}_2 - a_2\dot{c}_1) - 2(a_2 + c_2)\dot{c}_1 + 2(a_1 + c_1)\dot{c}_2 \\ &= \dot{c}_3 - 2c_2\dot{c}_1 + 2c_1\dot{c}_2. \end{aligned}$$

D'où le lagrangien est préservé par les translations à gauche.

**Corollaire 5.4.** *Les solutions des équations d'Euler-Lagrange 40 sont invariants par les translations à gauche sur  $\mathbb{H}$ .*

**Proposition 5.12.** *Soient  $c$  une géodésique et  $\bar{c} = L_a c$ , alors*

- (i)  $\bar{c}$  est aussi une géodésique,
- (ii)  $c$  et  $\bar{c}$  ont la même longueur.

**Démonstration.**(i) Si  $c$  est une géodésique et  $\bar{c} = L_a c$ , il vient de la proposition 5.10 que la courbe  $c$  est horizontale et est solution du système 40. En appliquant le corollaire 5.4 et la proposition 4.3, on obtient que la courbe  $\bar{c}$  est solution des équations d'Euler-Lagrange 40 et elle est horizontale. En utilisant la proposition 5.10, on trouve que  $\bar{c}$  est une géodésique.

- (ii) D'après le corollaire 4.2

$$\dot{\bar{c}} = \dot{c}_1 X_{1/\bar{c}} + \dot{c}_2 X_{2/\bar{c}}$$

et donc  $|\dot{c}|^2 = |\dot{\bar{c}}|^2$ . Utilisons la proposition 5.7 (ii)

$$\ell(c) = \int_0^1 |\dot{c}| ds = |\dot{c}| = |\dot{\bar{c}}| = \int_0^1 |\dot{\bar{c}}| ds = \ell(\bar{c}).$$

Un problème intéressant est de caractériser le nombre de géodésiques qui peuvent joindre deux points donnés et aussi d'étudier leurs propriétés métriques. Ce problème se ramène, d'après la proposition 5.12 à l'étude des géodésiques qui partent de l'origine.

## 6. MINIMISEURS SINGULIERS SUR LA VARIÉTÉ D'HEISENBERG

L'objectif de cette section est de mettre en évidence l'existence d'une classe de géodésiques "exceptionnelle", en géométrie sous-riemannienne. Ce type de courbes minimisantes qui n'existe pas dans le cas de la distribution d'Heisenberg, a été découvert par Montgomery [11].

On considère alors, la distribution définie par les deux champs de vecteurs

$$(41) \quad X_1 = \partial_{x_1} + A_1(x)\partial_t, \quad X_2 = \partial_{x_2} - A_2(x)\partial_t,$$

avec  $A_1, A_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ . Si  $g$  est une métrique sous-riemannienne sur  $\mathcal{D}$ , le triplet  $(\mathbb{R}^3, \mathcal{D}, g)$  est appelé variété d'Heisenberg [4]. Les variétés d'Heisenberg sont des variétés sous-riemanniennes qui ressemblent localement au groupe d'Heisenberg, mais qui ne sont pas nécessairement dérivées d'une structure de groupe.

Comme pour toute courbe  $c = (x_1, x_2, t)$ , le vecteur vitesse peut s'écrire

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \dot{x}_1 \partial_{x_1} + \dot{x}_2 \partial_{x_2} + \dot{t} \partial_t \\ &= \dot{x}_1 X_1 + \dot{x}_2 X_2 + (\dot{t} - \dot{x}_1 A_1(x) + \dot{x}_2 A_2(x)) \partial_t.\end{aligned}$$

La courbe  $c$  est horizontale si et seulement si

$$(42) \quad \dot{t} - \dot{x}_1 A_1(x) + \dot{x}_2 A_2(x) = 0$$

Si la métrique sous riemannienne  $g$  est définie par les champs de vecteurs  $X_1, X_2$ , alors pour toute courbe horizontale  $c$  on a

$$|\dot{c}|_g^2 = g(\dot{c}, \dot{c}) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2.$$

Le lagrangien est donné par

$$(43) \quad \begin{aligned}L(x, t, \dot{x}, \dot{t}) &= \frac{\lambda_0}{2} |\dot{c}|_g^2 + \lambda(s) \omega(\dot{c}) \\ &= \frac{\lambda_0}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \lambda(s) (\dot{t} - \dot{x}_1 A_1(x) + \dot{x}_2 A_2(x)),\end{aligned}$$

où

$$(44) \quad \omega = dt - A_1(x) dx_1 + A_2(x) dx_2,$$

est la 1-forme qui s'annule sur la distribution, i.e.  $\mathcal{D} = \ker \omega$ .

Le calcul des variations montre qu'il existe deux classes de courbes minimisantes

- la classe des courbes minimisantes régulières (ou normales) : ce sont les courbes obtenues en prenant le lagrangien 43 avec  $\lambda_0 \neq 0$ .
- la classe des courbes minimisantes singulières (ou anormales) : ce sont les courbes obtenues en prenant le lagrangien 43 avec  $\lambda_0 = 0$ .

L'intersection des deux classes n'est pas vide.

Pour obtenir les courbes minimisantes singulières sur la variété d'Heisenberg, on considère le lagrangien 43 avec  $\lambda_0 = 0$

$$(45) \quad L(x, t, \dot{x}, \dot{t}) = \lambda(s) (\dot{t} - A_1(x) \dot{x}_1 + A_2(x) \dot{x}_2).$$

Des équations

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \lambda(s) \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

il vient que  $\dot{\lambda}(s) = 0$ , i.e., le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est constant.

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= -\lambda A_1, & \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -\lambda \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \lambda \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \dot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= -\lambda A_2, & \frac{\partial L}{\partial x_2} &= -\lambda \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \dot{x}_1 + \lambda \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \dot{x}_2.\end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange,

$$(46) \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2,$$

donnent

$$(47) \quad \lambda\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)\dot{x}_1 = 0, \quad \lambda\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)\dot{x}_2 = 0.$$

La distribution  $\mathcal{D} = \text{span}\{X_1, X_2\}$  est non intégrable si et seulement si (voir 8)

$$d\omega \wedge \omega \neq 0,$$

comme on a

$$(48) \quad d\omega = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)dx_1 \wedge dx_2, \quad d\omega \wedge \omega = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dt,$$

il vient que  $\omega$  est non intégrable si et seulement si

$$(49) \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \neq 0.$$

Supposons que l'on a la condition de non intégrabilité 49 et soit  $\lambda \neq 0$ , alors 47 implique  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$  et de la contrainte d'horizontalité  $\dot{t} = A_1(x)\dot{x}_1 - A_2(x)\dot{x}_2$ , il vient que  $\dot{t} = 0$  et la courbe  $c(s) = (x_1(s), x_2(s), t(s))$  dégénère.

On obtient alors le résultat suivant :

**Proposition 6.1.** *Si la condition de non intégrabilité 49 a lieu, alors pas de géodésiques singulières pour les champs de vecteurs 41.*

Pour le groupe d'Heisenberg, on a

$$\omega = dt - 2x_2 dx_1 + 2x_1 dx_2,$$

alors  $A_1(x) = 2x_2$  et  $A_2(x) = 2x_1$  et la condition de non intégrabilité 48 a lieu, donc pas de géodésiques singulières pour la distribution d'Heisenberg.

## REFERENCES

- [1] R. Beals and P. C. Greiner, *Calculus on Heisenberg manifolds*, vol.119, Annals of Mathematical Studies, Princetown University Press, Princeton, NJ, 1988.
- [2] O. Calin, *Geodesics on a certain step 2 sub-Riemannian manifold*, Annals of Global Analysis and Geometry, vol.22, 2002, pp. 317-339.
- [3] O. Calin, D. C. Chang et P. Greiner, *Geometric mechanics on the Heisenberg group*, Bulletin of Institute of Mathematics Academia Sinica, vol.33, N°3, 2005.
- [4] O. Calin, D. C. Chang, *Sub-Riemannian geometry. General theory and examples*, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-89730-3. 2009.
- [5] L. Capogna, et autres, *An Introduction to the Heisenberg group and the Sub-Riemannian isoperimetric problem*, ISBN 978-3-7643-8132-5 Birkhäuser Verlag AG, Basel - Boston - Berlin.
- [6] G. Courtois, *Exemple de variété riemannienne et de spectre*, séminaire de théorie spectrale et géométrie, t.S9, 1991, pp.65-75.
- [7] F. Ferrari, B. Franchi, H. Pagot, *Courbure et sous-ensembles de courbes rectifiables dans le groupe de Heisenberg*, Séminaire EDP, 2005-2006, Polytechnique.
- [8] I. Kupka, *Géométrie sous-riemannienne*, Séminaire N. Bourbaki, 1995-1996, Exp N°817, pp. 351-380.
- [9] E. Le Donne, *Lecture notes on sub-Riemannian geometry*, <http://www.math.ethz.ch/ledonne>.
- [10] F. Monroy-Perez, A. Anzaldo-Mbnbses, *Optimal control on the Heisenberg group*, Journal of dynamical and control systems, vol.8, N°4, 1999, p.473-499.
- [11] R. Montgomery, *A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry*, Journal of Dynamical and Control Systems, vol.1, N°1, 1995, pp.49-90.



- [12] R. Monti, *Somme properties of Carnot-Carathéodory balls in the Heisenberg group*, Rend. Mat. Anal 11, 2001.
- [13] S. Rigot, *Transport optimal de mesure dans le groupe de Heisenberg*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, t.22, 2003-2004.
- [14] P. Pansu, *Une inégalité isopérimétrique sur le groupe de Heisenberg*, C. R. Acad. Sci. Paris, 295, I, 1982, pp.127-130.
- [15] P. Pansu, *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*. The Annals of Mathematics, 2nd Ser., vol. 129, N<sup>o</sup>1, 1989, pp. 1-60.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES ET NUMÉRIQUES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, FACULTÉ DES SCIENCES, UNIVERSITÉ DE SÉTIF, ALGÉRIE. (19000).

*E-mail address:* naceurdine\_bensalem@yahoo.fr